Ciągi liczbowe

Małgorzata Mąkosa

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Liczby: $1, 3, x-11$, w podanej kolejności, są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Liczba x jest równa

A. 5 **B.** 9 **C.** 16 **D.** 20

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2$$

$$\frac{1+(x-11)}{2} = 3$$

$$-10 + x = 6$$

$$x = 16$$

Zadanie 24. *(1 pkt)*
Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 4, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy (-2).
Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. 16 **B.** −16 **C.** 8 **D.** −8

$$q=\frac{a_4}{a_3}$$

$$q=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$$

$$a_3=a_1\cdot q^2$$

$$a_1=\frac{a_3}{q^2}=\frac{4}{(-\frac{1}{2})^2}=4\cdot 4=16$$

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Oblicz a_2 i a_5.

$$a_2 = (-1)^2 \cdot \frac{2-2}{2^2} = 0$$

$$a_5 = (-1)^5 \cdot \frac{2-5}{5^2} = -1 \cdot \frac{-3}{25} = \frac{3}{25}$$

Zadanie 10. ***(1 pkt)***
Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 4, a piąty wyraz tego ciągu jest równy 1. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. 4 **B.** $4\sqrt{2}$ **C.** 16 **D.** $16\sqrt{2}$

$$\frac{a_5}{a_3} = q^{5-3} = q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = q^2$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$$

Zadanie 17. ***(1 pkt)***

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-1)^n(n^2 - 2n)$ dla $n \geq 1$. Wtedy

A. $a_3 > 3$ **B.** $a_3 = 3$ **C.** $a_3 < 2$ **D.** $a_3 = 2$

$$a_3 = (-1)^3(3^2 - 2 \cdot 3) = -1 \cdot 3 = -3$$

Zadanie 25. *(2 pkt)*
Liczby $x-2,\ 3,\ x+6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

$$\frac{x-2+x+6}{2}=3$$

$$2x+4=6$$

$$2x=2$$

$$x=1$$

Zadanie 37. **(1 pkt)**
Liczby -8, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. -3 **B.** $-1{,}5$ **C.** 1 **D.** 15

$$a_1 \cdot a_3 = {a_2}^2$$

$$-8 \cdot (x+1) = 4^2$$

$$-8x - 8 = 16$$

$$-8x = 24$$

$$x = -3$$

Zadanie 74. (2 pkt)

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

$$n^2 - 2n - 24 < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 10$$

$$n_1 = -4$$

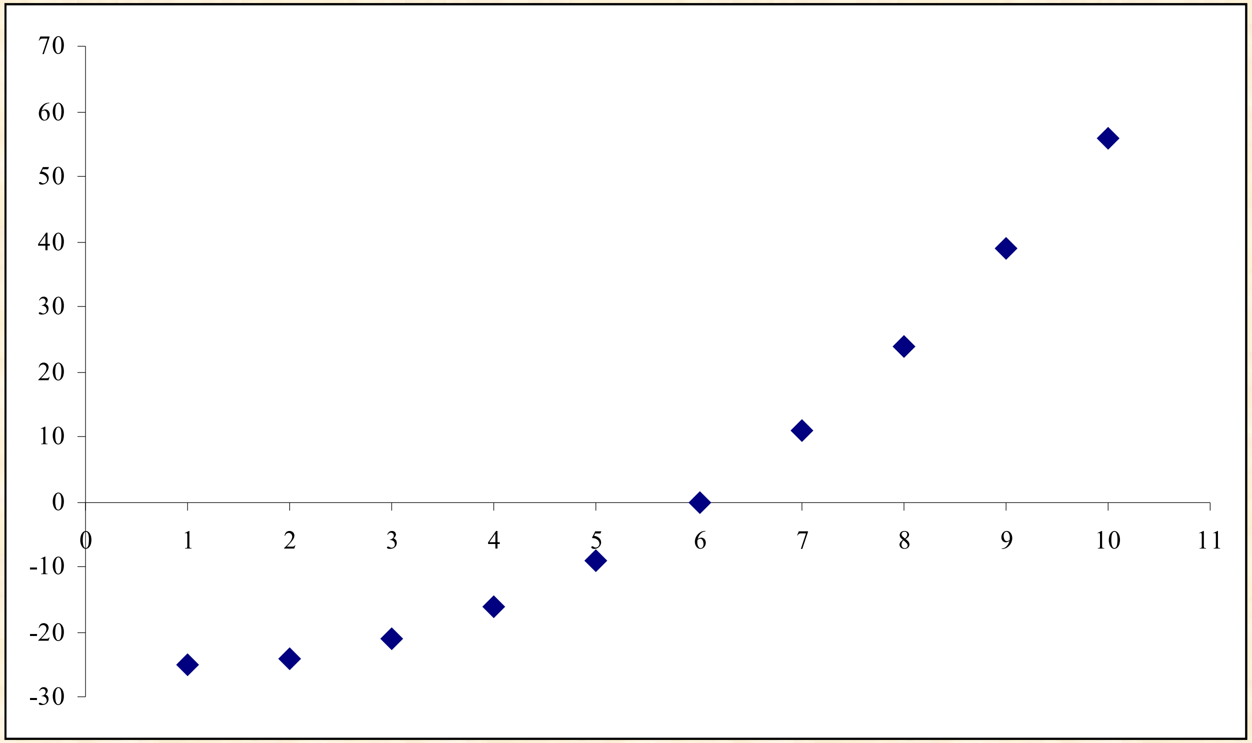
$$n_2 = 6$$

$$(n+4)(n-6) < 0$$

$$n \geq 1$$

zatem

$$n \in \{1,2,3,4,5\}$$



Zadanie 76. (2 pkt)

Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

$$a_1 = 2$$

$$r = 5$$

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 5$$

$$a_{15} = 2 + 14 \cdot 5 = 72$$

Zadanie 99.
Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 93. Te same liczby, w podanej kolejności są pierwszym, drugim i siódmym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz a, b i c.

$$a = a_1$$

$$b = a_1 + r$$

$$c = a_1 + 6r$$

$$\begin{cases} a + b + c = 93 \\ a \cdot c = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 7r = 93 \\ a_1 \cdot (a_1 + 6r) = (a_1 + r)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ a_1 = 31 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} r_1 = 12 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

zatem

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 15 \\ c = 75 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} a = 31 \\ b = 31 \\ c = 31 \end{cases}$$

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego *(a_n)* spełniającego podane warunki:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -6 \\ a_2 + a_4 = 0 \end{cases}.$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$zatem$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + r = -6 \\ a_1 + r + a_1 + 3r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + r = -6 \\ 2a_1 + 4r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$a_n = -4 + (n-1) \cdot 2 = -4 + 2n - 2 = 2n - 6$$

Zadanie 100.
Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że suma pierwszych pięciu jego wyrazów jest równa 10, a wyrazy trzeci, piąty i trzynasty tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.

$$\begin{cases} S_5 = 10 \\ a_3 \cdot a_{13} = {a_5}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = 10 \\ (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) = (a_1 + 4r)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} a_1 = -4 \\ r = 3 \end{cases}$$

zatem

$a_n = 3n - 7$ lub

$a_n = 2$

(2 pkt) Liczby *(a–8, 4, a–2)* tworzą ciąg geometryczny rosnący. Wyznacz *a*.

$$(a-8)(a-2)=4^2$$

$$a^2-2a-8a+16=16$$

$$a^2-10a=0$$

$$a(a-10)=0$$

$$a=0 \text{lub} a=10$$

$$a=10$$

Ciąg (a_n) jest

malejący, gdy

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

stały, gdy

$$a_{n+1} = a_n$$

rosnący, gdy

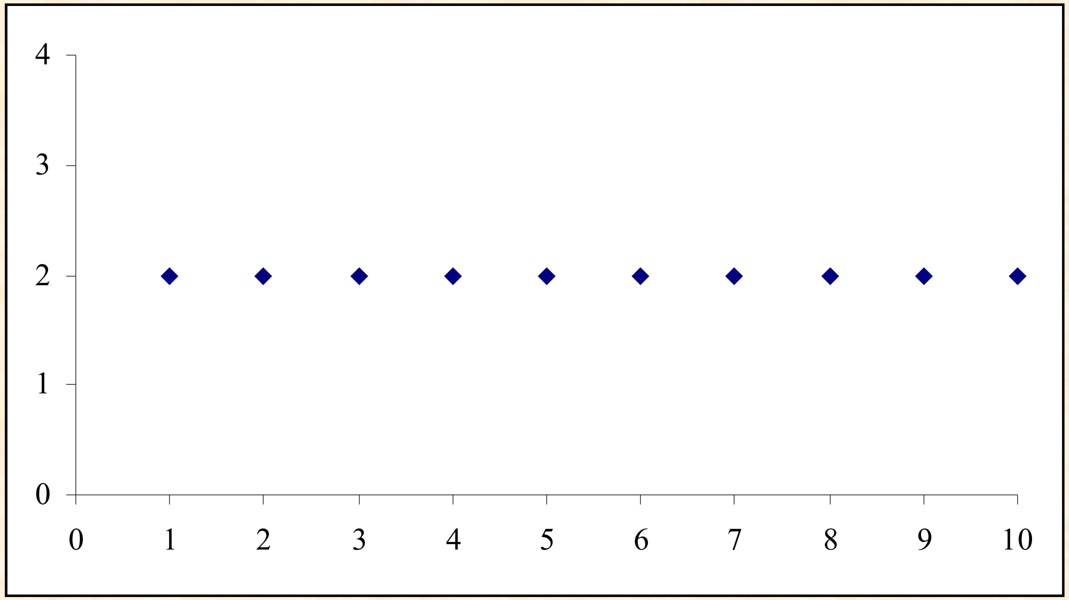
$$a_{n+1} - a_n > 0$$

dla każdego $n \in N_+$

W celu zbadania monotoniczności ciągu a_n należy:

- Wyznaczyć wyraz a_{n+1}
- Wyznaczyć różnicę $a_{n+1} - a_n$
- Zbadać znak różnicy $a_{n+1} – a_n$

Ciąg stały

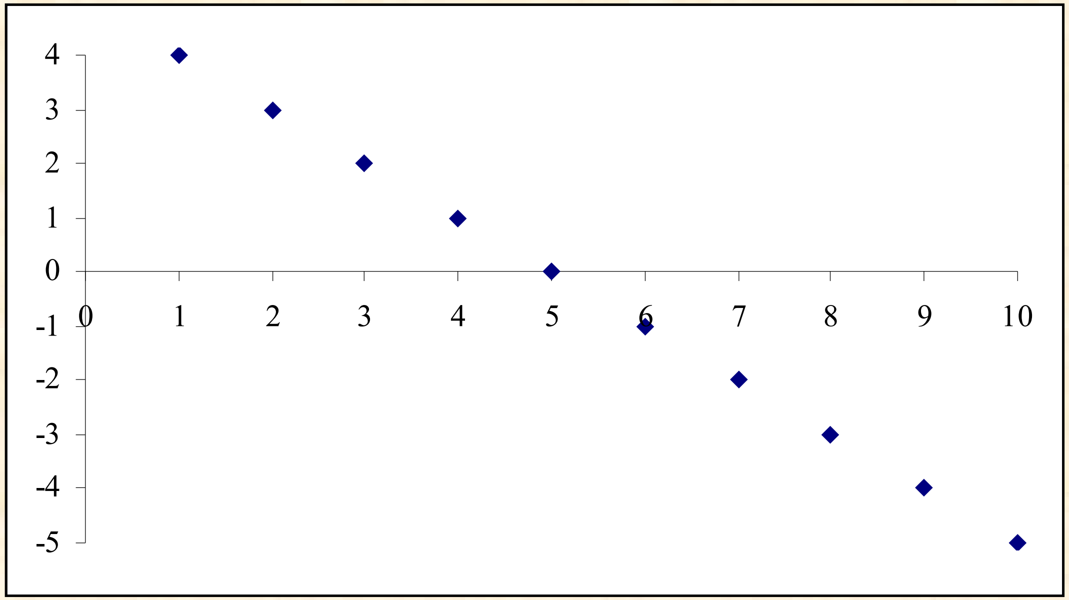


$$a_n = 2$$

$$a_{n+1} = 2$$

$$a_{n+1} - a_n = 0$$

Ciąg malejący



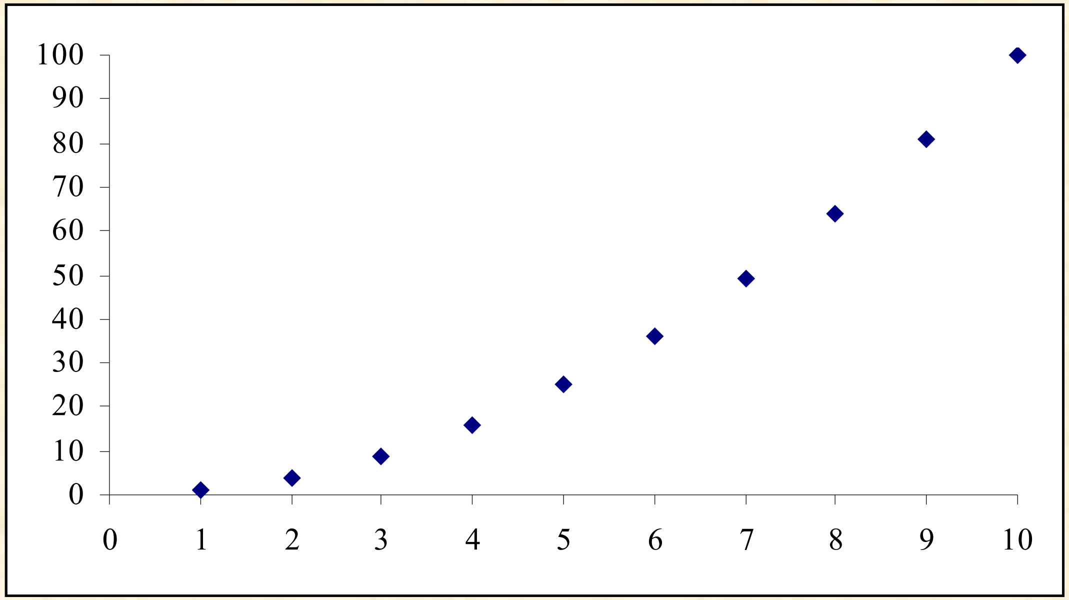
$$a_n = 5 - n$$

$$a_{n+1} = 5 - (n+1) = 5 - n - 1 = 4 - n$$

$$a_{n+1} - a_n = 4 - n - (5 - n) = 4 - n - 5 + n = -1$$

zatem $a_{n+1} - a_n < 0$

Ciąg rosnący



$$a_n = n^2$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

2n+1 > 0 - dla dowolnego $n \in N_+$

Zbadaj monotoniczność ciągu

$$a)a_n = n^2 + 3n$$

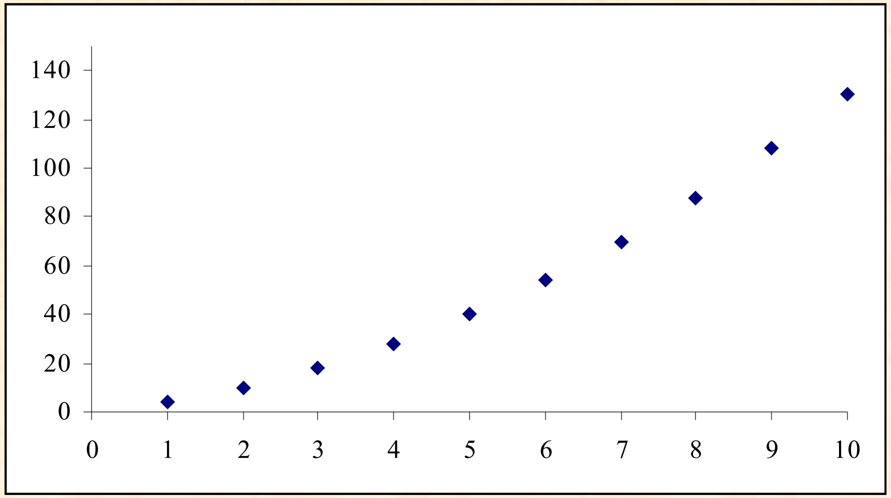
$$a_{n+1} = (n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 = n^2 + 5n + 4$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 5n + 4 - (n^2 + 3n) = 2n + 4$$

$2n+4 > 0$ - dla dowolnego

$$n \in N_+$$

zatem $a_{n+1} - a_n > 0$ czyli ciąg jest rosnący



Ciąg a_n jest

nierosnący, gdy

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

niemalejący, gdy

$$a_{n+1} - a_n \geq 0$$

Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym i każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.

Ciągi niemalejące i nierosnące nazywamy ciągami monotonicznymi.